

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- [2025 · 广东惠州实验中学高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n(2n+1)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4 =$ ()
A. 4 B. 6
C. 8 D. 10
- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 2, S_6 = 6$, 则 $a_7 + a_8 + a_9 =$ ()
A. 2 B. 4
C. 6 D. 8
- 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 若 a_6, a_{10} 为方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的两个根, 则 $a_8 =$ ()
A. $\pm\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$
C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}$
- [2025 · 福建浦城一中高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项分别为 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 根据以上规律, 数列 $\{a_n\}$ 的第 50 项为 ()
A. 1275 B. 1596
C. 1597 D. 1598
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} -n^2 + 2\lambda n, & n \leq 3, \\ 4n - 1, & n > 3, \end{cases}$ 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 λ 的取值范围是 ()
A. (3, 4) B. [3, 4)
C. $(\frac{5}{2}, 4)$ D. $[\frac{5}{2}, 4)$
- 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 + a_5 + a_7 = 6, S_7 = -7$, 则 S_n 取得最小值时 n 的值为 ()
A. 3 B. 4
C. 5 D. 6
- [2026 · 江苏常州高二期末] 设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 若 $\frac{a_{n+1}}{T_{n+1}} - \frac{a_n}{T_n} = 2$, 则 $a_{2026} =$ ()
A. $\frac{4049}{4051}$ B. $\frac{4051}{4053}$
C. $\frac{4053}{4051}$ D. $\frac{6074}{6077}$

- [2025 · 北京交通大学附中高二期中] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 1$, 公比为 q , 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则“ $0 < q < 1$ ”是“数列 $\{T_n\}$ 为递减数列”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

- 已知数列 $\{a_n\}$ 为 1, 0, 1, 0, 1, 0, $\dots$, 则 ()
A. $a_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$ B. $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = 1$
C. $a_n = \cos \frac{(n-1)\pi}{2}$ D. $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数} \\ 0, & n \text{ 是偶数} \end{cases}$
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d > 0$, 且 $S_{18} = S_{25}$, 则下列说法正确的是 ()
A. $a_1 < 0$
B. $a_1 + a_{43} = 0$
C. 当 S_n 取得最小值时, n 的值为 22
D. 当 $S_n > 0$ 时, n 的最小值为 44
- [2026 · 浙江衢州高二期末] 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} a_1 = 1, b_n = a_{2n}, S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 ()
A. $b_2 = 5$
B. 数列 $\{b_n + 1\}$ 为等比数列
C. $a_{100} = 3 \times 2^{50} - 1$
D. $S_{2n-1} = 9 \times 2^{n-1} - 3n - 5$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

- [2025 · 上海长宁区高二期中] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = \begin{cases} n^2, & n \leq 4, \\ 5n - 4, & n > 4, \end{cases}$ 则 $a_5 =$ _____.
- 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + S_3 = 6, S_3 = 3a_3$, 则 $a_2 =$ _____.
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2a_n - 2$, 则 $a_n =$ _____, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_{\sqrt{2}} a_n - 21$, 数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 T_n 的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- (13 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = -2n^2 + 11n$.
(1) 求 S_n 的最大值;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (15 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, S_3 = 12$, 且 $a_2 + a_4 = 10$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设函数 $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 证明: 对任意的正整数 n , 不等式 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 4$ 恒成立.



17. (15 分)某高科技企业研制出一种型号为 A 的精密数控车床, A 型车床为企业创造的价值逐年减少.若第 1 年 A 型车床创造的价值是 250 万元,且第 2 年至第 6 年,每年 A 型车床创造的价值比上一年减少 30 万元,从第 7 年开始,每年 A 型车床创造的价值是上一年的 50%.现用 $a_n(n \in \mathbf{N}^*)$ (单位:万元)表示 A 型车床在第 n 年创造的价值.
- (1)求数列 $\{a_n\}(n \in \mathbf{N}^*)$ 的通项公式.
- (2)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $T_n = \frac{S_n}{n}$,企业经过成本核算,若 $T_n > 100$,则继续使用 A 型车床,否则更换 A 型车床,试问该企业应在第几年年初更换 A 型车床?

18. (17 分)[2025 · 重庆八中高二月考] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,公差 $d = 4, a_k = 15, S_k = 36, k \in \mathbf{N}^*$.
- (1)求 k 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)记 $b_n = \frac{S_n}{n+c}, n \in \mathbf{N}^*$,若 b_1, b_2, b_3 成等差数列,求 c 并证明 $\{b_n\}$ 为等差数列.

19. (17 分)[2025 · 八省联考] 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+2}$.
- (1)证明:数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 为等比数列;
- (2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (3)令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$,证明: $b_n < b_{n+1} < 1$.